

Verifisc: une étude formelle du calcul de l'impôt

Denis MERIGOUX

Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique

24 octobre 2019

The logo for Inria, consisting of the word "Inria" written in a stylized, red, cursive script font.

Code Général des Impôts, Article 197, I, 3, b, 3°

Le taux de la réduction prévue au premier alinéa du présent b est de 20 %.
Toutefois, pour [...], le taux de la réduction d'impôt est égal à 20 % multiplié par le rapport entre :

- au numérateur, la différence entre 20 500 €, pour [...], ou 41 000 €, pour [...], et le montant des revenus mentionnés au troisième alinéa du présent b, et ;
- au dénominateur, 2 000 €, pour [...], ou 4 000 €, pour [...].

Code Général des Impôts, Article 197, I, 3, b, 3°

Le taux de la réduction prévue au premier alinéa du présent b est de 20 %.
Toutefois, pour [...], le taux de la réduction d'impôt est égal à 20 % multiplié par le rapport entre :

- au numérateur, la différence entre 20 500 €, pour [...], ou 41 000 €, pour [...], et le montant des revenus mentionnés au troisième alinéa du présent b, et ;
- au dénominateur, 2 000 €, pour [...], ou 4 000 €, pour [...].

Qu'est-ce qu'un algorithme ?

Code Général des Impôts, Article 197, I, 3, b, 3°

Le taux de la réduction prévue au premier alinéa du présent b est de 20 %. Toutefois, pour [...], le taux de la réduction d'impôt est égal à 20 % multiplié par le rapport entre :

- au numérateur, la différence entre 20 500 €, pour [...], ou 41 000 €, pour [...], et le montant des revenus mentionnés au troisième alinéa du présent b, et ;
- au dénominateur, 2 000 €, pour [...], ou 4 000 €, pour [...].

Qu'est-ce qu'un algorithme ?

- Décision sans intervention humaine
- Absence d'ambiguïté
- Données quantitatives (revenus, nombre d'enfants, etc.)

Un exemple de traduction algorithmique

```
TAUX = si (non [...1...]) alors  
      20 %
```

« Le taux de la réduction prévue au premier alinéa du présent b est de 20 %. Toutefois, pour [...(1)...],... »

Un exemple de traduction algorithmique

```
TAUX = si (non [...1...]) alors
  20 %
sinon
  20 % * (
    (
      )
    /
    (
      )
  )
```

- « il est égal à 20 % multiplié par le rapport entre :
- au numérateur, ... ;
 - au dénominateur, ... »

Un exemple de traduction algorithmique

```
TAUX = si (non [...1...]) alors
  20 %
sinon
  20 % * (
    (
      (si [...2,3...] alors 20 500 € sinon 41000 €)
      - REVENUS
    )
  /
  (
    )
  )
```

« au numérateur, la différence entre 20 500 €, pour [...(2)...], ou 41 000 €, pour [...(3)...], et le montant des revenus mentionnés au troisième alinéa du présent b »

Un exemple de traduction algorithmique

```
TAUX = si (non [...1...]) alors
  20 %
sinon
  20 % * (
    (
      (si [...2,3...] alors 20 500 € sinon 41000 €)
      - REVENUS
    )
  /
  (si [...4,5...] alors 2000 € sinon 4000 €)
)
```

« au dénominateur, 2 000 €, pour [...(4)...], ou 4 000 €, pour [...(5)...]. »

Un peu de théorie

Comment étudier un algorithme ?

Comment étudier un algorithme ?

- entrées : revenus, nombre d'enfants, etc
- sortie = $f(\text{entrées})$: impôt à payer

Il faut étudier f *mathématiquement* !

Comment étudier un algorithme ?

- entrées : revenus, nombre d'enfants, etc
- sortie = $f(\text{entrées})$: impôt à payer

Il faut étudier f *mathématiquement* !

Propriétés de f :

- f est-elle *croissante* avec les revenus ?
- f est-elle *décroissante* avec le nombre d'enfants ?

Comment étudier un algorithme ?

- entrées : revenus, nombre d'enfants, etc
- sortie = $f(\text{entrées})$: impôt à payer

Il faut étudier f *mathématiquement* !

Propriétés de f :

- f est-elle *croissante* avec les revenus ?
- f est-elle *décroissante* avec le nombre d'enfants ?
- Quel est la *dérivée* de f ? \Rightarrow taux marginal d'imposition

Les méthodes formelles à la rescousse

- Domaine à la croisée des mathématiques et de l'informatique

Les méthodes formelles à la rescousse

- Domaine à la croisée des mathématiques et de l'informatique
- De la recherche...

THE FORMULAE-AS-TYPES NOTION OF CONSTRUCTION

W. A. Howard

*Department of Mathematics, University of
Illinois at Chicago Circle, Chicago, Illinois 60680, U.S.A.*

Dedicated to H. B. Curry on the occasion of his 80th birthday.

The following consists of notes which were privately circulated in 1969. Since they have been referred to a few times in the literature, it seems worth while to publish them. They have been rearranged for easier reading, and some inessential corrections have been made.

Les méthodes formelles à la rescousse

- Domaine à la croisée des mathématiques et de l'informatique
- De la recherche...

Computational Higher Type Theory IV: Inductive Types

Evan Cavallo*
Carnegie Mellon University

Robert Harper†
Carnegie Mellon University

July, 2018

Abstract

This is the fourth in a series of papers extending Martin-Löf's meaning explanation of dependent type theory to higher-dimensional types. In this installment, we show how to define cubical type systems supporting a general schema of *indexed cubical inductive types* whose constructors may take dimension parameters and have a specified boundary. Using this schema, we are able to specify and implement many of the higher inductive types which have been postulated in homotopy type theory, including homotopy pushouts, the torus, W -quotients, truncations, arbitrary localizations. By including indexed inductive types, we enable the definition of identity types.

The addition of higher inductive types makes computational higher type theory a model of homotopy type theory, capable of interpreting almost all of the constructions in the HoTT Book [40] (with the exception of inductive-inductive types). This is the first such model with an explicit *canonicity theorem*, which specifies the canonical values of higher inductive types and confirms that every term in an inductive type evaluates to such a value.

Les méthodes formelles à la rescousse

- Domaine à la croisée des mathématiques et de l'informatique
- De la recherche...
- Aux applications industrielles !

Systemes vérifiés

- Ligne 14 du métro
- Pilotes automatiques dans l'aviation
- Commandes des centrales nucléaires
- Guidage de la fusée Ariane
- ...

Les méthodes formelles à la rescousse

- Domaine à la croisée des mathématiques et de l'informatique
- De la recherche...
- Aux applications industrielles !

Systemes vérifiés

- Ligne 14 du métro
- Pilotes automatiques dans l'aviation
- Commandes des centrales nucléaires
- Guidage de la fusée Ariane
- ... Pourquoi pas le calcul de l'impôt ?

Étude de cas : la taxation marginale

Modélisation

Caractéristique	Ménage avant	Ménage après
Revenu annuel	R_0	$R_0 + \Delta_R$

Étude de cas : la taxation marginale

Modélisation

Caractéristique	Ménage avant	Ménage après
Revenu annuel	R_0	$R_0 + \Delta_R$
Impôt sur le revenu	I_0	$I_0 + \Delta_I$
Allocations	A_0	$A_0 - \Delta_A$

Étude de cas : la taxation marginale

Modélisation

Caractéristique	Ménage avant	Ménage après
Revenu annuel	R_0	$R_0 + \Delta_R$
Impôt sur le revenu	I_0	$I_0 + \Delta_I$
Allocations	A_0	$A_0 - \Delta_A$
Net touché	$N_0 = R_0 - I_0 + A_0$	$N_0 - \Delta_I - \Delta_A$

Étude de cas : la taxation marginale

Modélisation

Caractéristique	Ménage avant	Ménage après
Revenu annuel	R_0	$R_0 + \Delta_R$
Impôt sur le revenu	I_0	$I_0 + \Delta_I$
Allocations	A_0	$A_0 - \Delta_A$
Net touché	$N_0 = R_0 - I_0 + A_0$	$N_0 - \Delta_I - \Delta_A$

Taux marginal de prélèvement effectif

$$T_{\text{eff}} = \frac{\Delta_I + \Delta_A}{\Delta_R}$$

Étude de cas : la taxation marginale

Modélisation

Caractéristique	Ménage avant	Ménage après
Revenu annuel	R_0	$R_0 + \Delta_R$
Impôt sur le revenu	I_0	$I_0 + \Delta_I$
Allocations	A_0	$A_0 - \Delta_A$
Net touché	$N_0 = R_0 - I_0 + A_0$	$N_0 - \Delta_I - \Delta_A$

Taux marginal de prélèvement effectif

$$T_{\text{eff}} = \frac{\Delta_I + \Delta_A}{\Delta_R}$$

Existe-t-il un ménage tel que $T_{\text{eff}} \geq 70\%$?

Notre marteau : le solveur SMT

Comment répondre à cette question ?

Notre marteau : le solveur SMT

Comment répondre à cette question ?

- Énumérer tous les ménages possibles ?
⇒ inefficace...

Notre marteau : le solveur SMT

Comment répondre à cette question ?

- Énumérer tous les ménages possibles ?
⇒ inefficace...
- Tester sur des données réelles ?
⇒ secret fiscal, cas limites

Notre marteau : le solveur SMT

Comment répondre à cette question ?

- Énumérer tous les ménages possibles ?
⇒ inefficace...
- Tester sur des données réelles ?
⇒ secret fiscal, cas limites
- Optimisation statistique / *machine learning* ?
⇒ f trop compliquée

Notre marteau : le solveur SMT

Comment répondre à cette question ?

- Énumérer tous les ménages possibles ?
⇒ inefficace...
- Tester sur des données réelles ?
⇒ secret fiscal, cas limites
- Optimisation statistique / *machine learning* ?
⇒ f trop compliquée

Satisfiabilité Modulo des Théories

Outil issu de la recherche en méthodes formelles. Répond à des question du type :
« Existe-il une situation telle que ... ? »

Contre-exemple

Le solveur SMT réfléchit... et trouve !

Contre-exemple

Le solveur SMT réfléchit... et trouve !

Couple en concubinage, deux lycéens (15 et 17 ans), à charge deuxième parent (sans activité). Habite en zone II, loyer 897,75 € par mois. Augmentation 250 € par mois.

Contre-exemple

Le solveur SMT réfléchit... et trouve !

Couple en concubinage, deux lycéens (15 et 17 ans), à charge deuxième parent (sans activité). Habite en zone II, loyer 897,75 € par mois. Augmentation 250 € par mois.

Caractéristique	Valeur avant	Valeur après	Variation
Revenu annuel <i>R</i>	33 129,12 €	36 129,12 €	+ 3 000,00 €
IR	3 147,00 €	3 957,00 €	+ 810,00 €
PA	110,00 €	0,00 €	- 110,00 €
AF	132,00 €	132,00 €	0,00 €
ARS	806,00 €	0,00 €	- 806,00 €
BC	0,00 €	0,00 €	0,00 €
BL	0,00 €	0,00 €	0,00 €
APL	0,00 €	0,00 €	0,00 €
Net touché <i>N</i>	33 692,12 €	33 756,12 €	+ 64,00 €
Taux marginal			97,9 %

Une fiscalité vérifiée par SMT ?

Avantages

- Analyse systématique
- Modèle très expressif
- Pas besoin de données
- Sémantique précise

Une fiscalité vérifiée par SMT ?

Avantages

- Analyse systématique
- Modèle très expressif
- Pas besoin de données
- Sémantique précise

Problèmes techniques

- Complexité \Rightarrow ressources et temps de calcul.
- Besoin d'optimiser les requêtes.

À vos questions...

- « Est-il possible pour un ménage de gagner/perdre plus de x € à la suite de la réforme fiscale de cette année ? »

À vos questions...

- « Est-il possible pour un ménage de gagner/perdre plus de x € à la suite de la réforme fiscale de cette année ? »
- « Est-il possible d'augmenter le taux de la deuxième tranche d'imposition de plus de 5 points sans qu'aucun ménage ne perde plus de 200 € par an ? »

À vos questions...

- « Est-il possible pour un ménage de gagner/perdre plus de x € à la suite de la réforme fiscale de cette année ? »
- « Est-il possible d'augmenter le taux de la deuxième tranche d'imposition de plus de 5 points sans qu'aucun ménage ne perde plus de 200 € par an ? »
- « Est-il possible de jouer sur les taux des tranches et de la décote de manière à percevoir 5 milliards par an en plus sans qu'aucun ménage ne voie son impôt augmenter de 3 % de ses revenus ? »

À vos questions...

- « Est-il possible pour un ménage de gagner/perdre plus de x € à la suite de la réforme fiscale de cette année ? »
- « Est-il possible d'augmenter le taux de la deuxième tranche d'imposition de plus de 5 points sans qu'aucun ménage ne perde plus de 200 € par an ? »
- « Est-il possible de jouer sur les taux des tranches et de la décote de manière à percevoir 5 milliards par an en plus sans qu'aucun ménage ne voie son impôt augmenter de 3 % de ses revenus ? »

<https://gitlab.inria.fr/verifisc/verifisc-python>